

# データの固有次元に基づいた深層ニューラルネットワークの汎化誤差解析

東京大・経済・修士2年 中田 竜明  
統計数理研究所・数理・推論研究系 今泉 允聡

## 1 はじめに

深層ニューラルネットワーク (DNN) は現在幅広い分野で使われている手法であり, その理論解析が盛んに行われている. 推定量として見た DNN は, 適切なパラメータ数とレイヤー数のもとで最適なミニマクス収束レートを達成することが知られている [1]. しかし, 画像認識などのタスクでは入力次元が非常に大きく, その収束レートは非常に遅くなる. 一方で, 画像データを含む現実のデータでは, 入力データのサポートが表面的な入力次元よりも低次元に分布していることが観測されている.

本研究ではこの点に着目し, DNN の収束レートが入力次元ではなくデータの固有次元により決定されることを確認する. さらに, DNN が低次元性を仮定したモデルにおけるミニマクス収束レートをほぼ達成することも示す.

## 2 研究内容

$n$  個のデータが回帰モデル  $Y_i = f_0(X_i) + \xi_i$ ,  $X_i \in \mathbb{R}^D$  により独立に生成されている場合を考える. ただし  $f_0$  は  $\beta$ -Hölder 連続な関数とし,  $\xi_i \sim N(0, \sigma^2)$  を仮定する.  $X_i$  の分布を  $\mu$  とする. 回帰関数  $f_0$  を DNN により推定する.

入力データの固有次元を (Upper) Minkowski 次元を用いて測る.  $\mu$  のサポートを  $\text{Supp } \mu$ , 集合  $E \subset \mathbb{R}^D$  の  $\varepsilon$ -Covering Number を  $\mathcal{N}(E, \varepsilon)$  とすると, 分布  $\mu$  の Minkowski 次元は,

$$\dim_M \mu := \inf \left\{ d^* > 0 \mid \limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \mathcal{N}(\text{Supp } \mu, \varepsilon) \varepsilon^{d^*} = 0 \right\}$$

により定義される.

この定義の下で DNN の近似レートを再評価し,  $\mu$  の Minkowski 次元が  $d$  の場合,  $L^2(\mu)$  収束レートが  $\|\hat{f} - f_0\|_{L^2(\mu)}^2 = \tilde{O}(n^{-2\beta/(2\beta+d)})$  を達成することを示す. さらに, 特定の Minkowski 次元  $d$  を持つ分布  $\mu$  に対する Minimax 収束レートを導出し, DNN がこの収束レートをほぼ達成することを示す.

## 参考文献

- [1] Schmidt-Hieber, J. (2017). Nonparametric regression using deep neural networks with ReLU activation function. arXiv preprint arXiv:1708.06633.
- [2] Bickel, P. J., and Li, B. (2007). Local polynomial regression on unknown manifolds. In Complex datasets and inverse problems (pp. 177-186). Institute of Mathematical Statistics.