

# 生存時間分布に対する共有フレイルティモデルの一般化

北海道大学 鈴木晶夫

## 1. はじめに

多変量生存時間データの解析は、医学・生物学・工学・経済学等、様々な分野において、その重要性が増している。Hougaard (2000) は、「多変量生存時間データにおいては、独立性が成り立たない多変量生存時間分布を扱う」と述べている。従属性のモデリングにおいて、コンピュータに基づくモデリングが有用であり、1980年頃から様々なコンピュータが提案されたきた (Nelsen 2006, McNeil 2005, Joe 2014 など参照)。

多変量生存時間分布のモデルとして、共有フレイルティモデルが最もよく用いられる。多変量生存時間解析を扱う書の多くにおいて、これについて論じられている (Hougaard 2000, Aalen *et al.* 2008 等)。このモデルは、フレイルティ(脆弱さ)の共有によって生存時間の従属性が生じると考えるモデルであり、潜在変数モデルの一つである。例えば、同じ親から生まれた複数のラットは、フレイルティを共有すると考える。

共有フレイルティモデルから導出されるコンピュータは、Kimberling (1974) により導入されたアルキメデスコピューラに他ならない。言い換えれば、共有されるフレイルティがハザードに作用すると考えることにより、アルキメデスコピューラが導出される。本報告において、Dabrowska and Doksum (1988) の一般化オッズ比に作用するフレイルティを考えることにより、共有フレイルティモデルの一般化を提案する。これよりアルキメデスコピューラの一般化が導出される。

## 2. 一般化共有フレイルティモデル

$d$  変量生存時間確率変数  $T_1, \dots, T_d$  は、フレイルティ  $Z$  を共有する。ただし、 $Z$  を正値確率変数とする。フレイルティ  $Z = z$  が与えられたとき、 $T_1, \dots, T_d$  は条件付き独立であると仮定する。また、 $j = 1, \dots, d$  に対して、 $Z = z$  が与えられたもとの  $T_j$  の条件付き生存関数を  $\bar{F}_j(t_j|z)$  とする。 $c_1, \dots, c_d$  を非負定数とし、各  $0 \leq j \leq d$  に対して、条件付き分布  $F_j(t_j|z)$  の一般化オッズ比関数 (Dabrowska and Doksum 1988) を

$$\Lambda_j(t_j|c_j, z) = \begin{cases} c_j^{-1} \{1 - \bar{F}_j^{c_j}(t_j|z)\} / \{\bar{F}_j^{c_j}(t_j|z)\}, & c_j > 0 \\ -\log \bar{F}_j(t_j|z), & c_j = 0. \end{cases}$$

により定義する。フレイルティ  $Z = 1$  の場合を基準として、各  $j$  に対して、基準一般化オッズ比を  $\Lambda_{0,j}(t_j|c_j) = \Lambda_j(t_j|c_j, 1)$  とおく。条件付き分布の一般化オッズ比がフレイルティ  $z$  に比例することを仮定する。すなわち、 $\Lambda_j(t_j|c_j, z) = z \Lambda_{0,j}(t_j|c_j)$ ,  $j = 1, \dots, d$  を仮定する。このモデルにおいて、 $c_1 = \dots = c_d = 0$  とおいた場合が、通常の共有フレイルティモデルである。

## 参考文献

- Aalen, O., Borgan, O. and Gjessing, H. (2008). *Survival and Event History Analysis, A Process Point of View*, Springer Verlag, New York.
- Dabrowska, D. M. and Doksum, K. A. (1988). *J. Amer. Statist. Assoc.*, **83**, 744-749.
- Hougaard, P. (2000). *Analysis for Multivariate Survival Data*, Springer-Verlag, New York.
- Joe, H. (2014). *Dependence Modeling with Copulas*, Chapman and Hall, London.
- Kimberling, C. H. (1974). *Aequationes Mathematicae*, **10**, 152-164.
- McNeil, A. J., Frey, R. and Embrechts, P. (2005). *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools*, Princeton University Press, Princeton.
- Nelsen, R. B. (2006). *An Introduction to Copulas, 2nd ed.*, Springer New York.