

潜在情報事前分布を用いた量子状態のベイズ推定

東京大・情報理工 古山貴之

東京大・情報理工 松田孟留

東京大・情報理工, 理研・脳センター 駒木文保

量子系の状態が未知パラメータ θ を用いて密度作用素 σ_θ と表されているとする。この量子系に対する測定結果 x をもとに密度作用素 σ_θ を推定することを考える。真の量子状態が σ_θ のときに ρ であると推定したときの損失を量子相対エントロピー

$$L(\rho; \sigma_\theta) := \text{Tr} \sigma_\theta (\log \sigma_\theta - \log \rho)$$

とおくと、ベイズ予測密度作用素

$$\sigma_\pi(x) = \int \sigma_\theta \pi(\theta|x) d\theta$$

が事前分布 π に対するベイズ解であることが [5] によって示されている。このように量子系の状態推定の問題は古典的な分布予測の問題 [1] と対応しており、ベイズ統計が有効である。

潜在情報事前分布は、観測量で条件付けられたパラメータと予測量の条件付相互情報量

$$I_{\theta; Y|X}(\pi) = \int \pi(\theta) p(x, y|\theta) \log \frac{p(y|\theta, x) \int \pi(\theta) p(x|\theta) d\theta}{\int \pi(\theta) p(x, y|\theta) d\theta} dx dy$$

を最大化する事前分布として定義され、Kullback-Leibler リスクのもとでミニマックスなベイズ予測分布を与える [3]。

本研究では、相互情報量の量子における対応物の一つである Holevo 相互情報量 [2] に着目し、観測量で条件付けられたパラメータと量子状態の条件付 Holevo 相互情報量

$$I_{\theta, \rho|X}(\pi) := \sum_{x, \theta} \pi(\theta) p_\theta(x) \text{Tr} \rho_{\theta, x} (\log \rho_{\theta, x} - \log (\sum_{\theta} \pi(\theta|x) \rho_{\theta, x}))$$

を最大化することでミニマックスな量子状態推定量を与える潜在情報事前分布を構成する。さらに、潜在情報事前分布に対するリスクを測定について最小化することでミニマックスな推定スキームを得ることができる。数値実験を行い、量子ビット系に対するミニマックス推定スキームについて考察した。これは [4] の結果の一つの具体例を与えている。

参考文献

- [1] J. Aitchison. Goodness of prediction fit. *Biometrika*, 62: 547–554, 1975.
- [2] A. S. Holevo. *Quantum Systems, Channels, Information*, Walter de Gruyter, Berlin, 2012.
- [3] F. Komaki. Bayesian predictive densities based on latent information priors. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 141: 3705–3715, 2011.
- [4] F. Tanaka. Quantum minimax theorem. arXiv:1410.3639 [quant-ph], 2014.
- [5] F. Tanaka and F. Komaki. Bayesian predictive density operators for exchangeable quantum-statistical models. *Physical Review A*, 71: 052323, 2005.