

# 円周上のコーシー分布と関連した統計モデル

統計数理研究所 加藤 昇吾

円周上のコーシー分布は、角度の観測を含むデータの統計解析に用いられる確率分布の1つである。本報告では、円周上のコーシー分布および関連した統計モデルについて、講演者の今までの研究成果を概説する。

## 1. 研究の背景

角度の観測とは、 $-\pi$ 以上 $\pi$ 未満の実数値 $\theta$ 、または円周上の点 $(\cos \theta, \sin \theta)$ 、として表現できる観測のことをいう。角度の観測を含むデータには、統計解析をする上で大きな問題がある。それは、このようなデータを解析する上では、統計学が主に対象としている実数値データのための解析手法をそのまま使うことができないという問題である。この問題は、角度（円周）には周期性があり、その位相が実数の位相と異なっていることに起因している。

そこで現在に至るまで、統計学では角度の観測を含むデータの解析法に関する研究がなされてきた。特に多く研究されてきたのが、「フォン・ミーゼス分布」と呼ばれる円周上の確率分布およびそれを応用した統計モデルである。フォン・ミーゼス分布は、実数上の正規分布からの自然なアナロジーにより導かれることから、「円周上の正規分布」と呼ばれることもある。しかし一方で、正規分布が持ついくつかの扱いやすい性質が成立しない問題点も指摘されており、そのことがフォン・ミーゼス分布、および、それを応用した統計モデルの理論的性質を導くことを困難にしていた。

## 2. 円周上のコーシー分布と関連した統計モデル

このような背景の下、講演者は、「円周上のコーシー分布」（以下、CC分布）と呼ばれる円周上の確率分布に着目し、その分布に関連した統計モデルを研究することにより、角度の観測を含むデータのための統計的手法を確立することを試みた。CC分布は、古くから知られてはいたもののほとんど注目されない分布であったが、McCullagh (1996) などによって多くの理論的性質が導かれた。そして、CC分布はフォン・ミーゼス分布では成り立たないいくつかの扱いやすい性質が成立することが明らかになった。

本報告では、CC分布に関連した統計モデルに関する講演者の過去の研究成果について概説する。特に、2変量角度データのための確率分布に関する研究結果 (Kato & Pewsey, 2015) については、ある程度詳しく紹介する。Kato & Pewsey (2015) では、CC分布の拡張として2変量角度データのための分布を提案し、その統計的性質を考察した。そして、この分布は、正規化定数が陽な形で表現できること、パラメータの解釈が明確であること、パラメータ推定が容易であることなど、2変量フォン・ミーゼス分布には成り立たない多くの扱いやすい性質を持つことを明らかにした。

### 参考文献

- [1] KATO, S. & PEWSEY, A. (2015). A Möbius transformation-induced distribution on the torus. *Biometrika*, **102**, 359–370.
- [2] MCCULLAGH, P. (1996). Möbius transformation and Cauchy parameter estimation. *The Annals of Statistics*, **24**, 787–808.