

# ベイズモデルに基づく Bridge 回帰モデリング

中央大学大学院理工学研究科 保科 架風

近年、様々な技術の発展に伴い、多くの場面で大規模かつ複雑な構造を有するデータが獲得・蓄積されている。そのようなデータに対し、線形回帰モデル  $\mathbf{y} = X\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$  (ただし、 $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^T$ ,  $X = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)^T$ ,  $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, \dots, x_{ip})^T$ ,  $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_p)$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)^T \sim N_n(\mathbf{0}, \sigma^2 I_n)$ ) を適用する際、最小 2 乗推定やモデル選択基準に基づく変数選択によって構成される従来のモデリング手法では推定の精度や計算コストの面で問題が生じることがある。これに対し、モデルの推定と変数の選択を同時に行うスパース回帰モデリングは、このようなデータから効率的に情報を抽出することが可能であるということが知られており、この 20 年間、盛んに研究が進められ、飛躍的な発展を遂げている。

スパース回帰モデリング手法の 1 つである bridge 回帰 (Frank and Friedman, 1993)

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \arg \min_{\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^p} \left[ \|\mathbf{y} - X\boldsymbol{\beta}\|^2 + \lambda \sum_{j=1}^p |\beta_j|^q \right] \quad (1)$$

( $\lambda (> 0)$  と  $q (> 0)$  はモデリングをコントロールする調整パラメータ) は  $q \leq 1$  のとき、適切に  $\lambda$  を選ぶことで  $\hat{\boldsymbol{\beta}}$  の幾つかの成分を厳密に 0 と推定する。また、最小 2 乗推定などで  $\hat{\boldsymbol{\beta}}$  の推定が不安定になる高次元・強相関な場合でも、 $q > 1$  とすると bridge 回帰は安定的に  $\hat{\boldsymbol{\beta}}$  を推定することが可能となる。このように、bridge 回帰は 2 つの調整パラメータによって異なる特長を持つモデリング手法となり、これらの値を適切に選ぶことで様々なデータから有益な情報を抽出することが可能となる。これに対し、Kawano (2014) では GBIC 基準 (Konishi *et al.*, 2004) によって bridge 回帰の調整パラメータを選択する手法を提案している。

一方、スパース回帰モデリングの諸手法はベイズモデルによって表現することが可能である。Park and Casella (2008) や Polson *et al.* (2014) では、回帰係数の事前分布に positive  $\alpha$ -stable 分布を設定すると回帰係数の MAP 推定が bridge 回帰と一致することを提示しており、Polson *et al.* (2014) は bridge 回帰をベイズ推定に拡張している。ベイズ推定では、事前分布を設定することで  $\lambda$  も推定することが可能であり、複数ある bridge 回帰の調整パラメータを 1 つに減らすことができる。ただし、このモデルの事後分布は多峰であり、また、 $\beta_j = 0$  で微分不可能となるため、MAP 推定値を求めることが困難となる。

これに対し本研究では、シミュレーテッド・アニーリング法によって bridge 回帰のベイズモデルに基づく MAP 推定を行い、また、調整パラメータ  $q$  の選択のためのモデル選択基準をモンテカルロ積分によって近似した対数周辺尤度をもとに提案する。なお、GBIC 基準も対数周辺尤度を近似したものであるが、GBIC がサンプルサイズに依存するラプラス近似を適用しているのに対し、本研究によって提案するモデル選択基準の近似精度はサンプルサイズには依存しないという特徴がある。

## 参考文献

- [1] Frank, I. and Friedman, J.H. (1993). A statistical view of some chemometrics regression tools (with discussion). *Technometrics*, 35, 109–135.
- [2] Kawano, S. (2014). Selection of tuning parameters in bridge regression models via Bayesian information criterion. *Statistical Paper*, 55, 1207–1223.
- [3] Konishi, S., Ando, T., and Imoto, S. (2004). Bayesian information criteria and smooth parameter selection in radial basis function network. *Biometrika*, 91, 27–43.
- [4] Polson, N.G., Scott, J.G., and Windle, J. (2014). The Bayesian bridge. *Journal of the Royal Statistical Society, Ser. B*, 76, 713–733.