

外部環境変化を考慮した不均一分散モデルについて

広島大学 大学院教育学研究科 山村 麻理子
龍谷大学 経済学部 庄司 功

外部環境の変化が注目する時系列のボラティリティに反映されることを考慮した不均一分散モデルを提案する。構造変化などの外部環境の変化は、注目する時系列の変動、ことにそのボラティリティの変化となって現れる。そこでまず外部環境の変化を、可変パラメータモデルを用いてモデル化し、パラメータの変化として取り出す。こうして取り出された外部環境の変化を時系列のボラティリティに反映させることによって不均一分散モデルを導く。

最初に、可変パラメータモデルを次の通りとする。

$$y_t = \beta_{0,t} + \beta_{1,t}y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (t = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

$$\beta_t = \beta_{t-1} + \xi_t \quad (t = 1, 2, \dots, n). \quad (2)$$

ただし、 y_t は構造変化など外部環境の変化を反映する観測可能な時系列データの変数である。 $\beta_{0,t}$ と $\beta_{1,t}$ は外部環境の変化をパラメータの変化として取り出した t 期ごとに異なる可変パラメータである。また、 $\beta_t = (\beta_{0,t}, \beta_{1,t})^T$ 、 $\beta_{t-1} = (\beta_{0,t-1}, \beta_{1,t-1})^T$ 、及び $\xi_t = (\xi_{0,t}, \xi_{1,t})^T$ である。(1) は次元 1 の自己回帰 (AR) モデルで、(2) はランダムウォーク過程に従っている。

可変パラメータ $\beta_{0,t}, \beta_{1,t}$ の推定方法は、(1) を状態空間モデル (State-space model) における観測方程式 (Observation equation)、一方の (2) をシステム方程式 (State equation) とみなすことで、カルマンフィルタを用いて推定する。

次に、外部環境の変化として取り出された可変パラメータのカルマンフィルタによる推定値 $\hat{\beta}_{0,t|t}, \hat{\beta}_{1,t|t}$ を、注目する時系列のボラティリティに反映させる。注目する時系列を 1 次の自己回帰モデルで次の通り表す。

$$x_t = c_0 + c_1x_{t-1} + v_t \quad (t = 1, 2, \dots, n). \quad (3)$$

ただし、誤差項を $v_t = \sigma_t v_t$ とし、 v_1, v_2, \dots, v_n は互いに独立に同一の標準正規分布に従っている。一方、 σ_t はボラティリティで、 $\sigma_t^2 = a_0\beta_{0,t} + a_1\beta_{1,t}$ と表す。 $\beta_{0,t}$ と $\beta_{1,t}$ は、それぞれ (1) における t 期の $\beta_{0,t}$ と $\beta_{1,t}$ であり、 a_0 と a_1 は未知のパラメータである。このように、誤差項 v_t にボラティリティを含み、ボラティリティを可変パラメータ $\beta_{0,t}$ と $\beta_{1,t}$ で構成することで、外部環境変化を時系列のボラティリティに反映させることができる。

(3) の推定方法は、カルマンフィルタによる推定結果 $\hat{\beta}_{0,t|t}, \hat{\beta}_{1,t|t}$ を (3) に代入し、未知パラメータ a_0, a_1, c_0, c_1 についての最尤法を用いる。 $v_t = (x_t - c_0 - c_1x_{t-1})/\sigma_t$ 、 $v_1, v_2, \dots, v_n \sim i.i.d.N(0, 1)$ より、 $\hat{\sigma}_1^2, \hat{\sigma}_2^2, \dots, \hat{\sigma}_n^2$ を与えた下での尤度関数は次の通りとなる。

$$L(a_0, a_1, c_0, c_1) = \prod_{t=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{x_t - c_0 - c_1x_{t-1}}{\hat{\sigma}_t} \right)^2 \right\}. \quad (4)$$

ただし、 $\hat{\sigma}_t^2 = a_0\hat{\beta}_{0,t|t} + a_1\hat{\beta}_{1,t|t}$ である。

提案したモデルについて、国内外で取引される金融商品の時系列データ等に適用して推定を試みた。推定結果については、発表当日に紹介する。