

非整数ブラウン運動とその日本の株式市場への応用

関西学院大学 理工 森本 孝之

ハースト指数 $H \neq \frac{1}{2}$ を持つ非整数ブラウン運動はセミマルチンゲールではないので、伊藤積分を適用することができない。つまり原資産が幾何非整数ブラウン運動に従う場合は、通常のブラック・ショールズ式を用いることができない。しかし、Hu and Øksendal (2003) や Elliott and Van Der Hoek (2003) が Wick 積に基づく確率積分を定義し、この積分に基づくモデルが無裁定性を保証することを示している。ただし、このモデルに対しては Sottinen and Valkeila (2003) および Björk and Hult (2005) がこれらの論文における自己金融取引戦略とポートフォリオに関する記述に経済学的誤謬を含んでいることを指摘している。

そこで本研究では Norros et al. (1999) に基づく非整数ブラウン運動版ブラック・ショールズ式によりオプション価格を評価する。Norros et al. (1999) は、非整数ブラウン運動と同一のフィルトレーションを生成する平均 0 の正規マルチンゲールを定義することにより、オプション評価を行う。彼らの非整数ブラウン運動版ヨーロッパ・コールのオプション価格 C_{fbs} は

$$C_{\text{fbs}} = s\Phi(d_3) - ke^{-rt}\Phi(d_4)$$

により求めることができる。ここで s は原資産価格、 k は行使価格、 t は満期までの期間、 r は安全資産の利子率、 σ はボラティリティ、 $\Phi(\cdot)$ は正規分布の分布関数であり

$$d_3 = \frac{\log\left(\frac{s}{k}\right) + \left(r + \frac{1}{2}c_2^2\sigma^2t^{1-2H}\right)t}{c_2\sigma t^{1-H}}, \quad d_4 = d_3 - c_2\sigma t^{(1-H)}$$

である。さらに $c_2 = \frac{c_H}{2H(2-2H)^{1/2}}$ 、 $c_H = \left(\frac{2H\Gamma(\frac{3}{2}-H)}{\Gamma(H+\frac{1}{2})\Gamma(2-2H)}\right)^{1/2}$ および $\Gamma(\cdot)$ はガンマ関数である。

本報告では、上述のモデルに加え最近の非整数ブラウン運動に関する研究を紹介し、その本邦株式市場への適用可能性を考察する。

参考文献

- [1] Björk, T. and Hult, H. (2005): “A note on Wick products and the fractional Black-Scholes model,” *Finance and Stochastics*, **9**, 197-209.
- [2] Elliott, R. J. and Van Der Hoek, J. (2003): “A General Fractional White Noise Theory And Applications To Finance,” *Mathematical Finance*, **13**, 301-330.
- [3] Hu, Y. and Øksendal, B. (2003): “Fractional white noise calculus and applications to finance,” *Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics*, **6**, 1-32.
- [4] Norros, I., Valkeila, E., and Virtamo, J. (1999): “An elementary approach to a Girsanov formula and other analytical results on fractional Brownian motion,” *Bernoulli*, **5**, 571-587.
- [5] Sottinen, T. and Valkeila, E. (2003): “On arbitrage and replication in the fractional Black-Scholes pricing model,” *Statistics and Decisions*, **21**, 93-107.