

モード不変性をもつ円周上の非対称分布族

東京理科大学 阿部 俊弘

University of Extremadura Arthur Pewsey

統計数理研究所 藤澤 洋徳

対称な円周分布を元にして、正規化定数が元の対称な円周分布と等しくモーメント計算が容易な非対称分布族として、Abe and Pewsey (2011) は密度関数が

$$(1 + \lambda \sin \theta) f_0(\theta), \quad \theta \in [-\pi, \pi)$$

となる正弦関数摂動分布族を提案した。ここで、 $|\lambda| \leq 1$ であり、 $f_0(\theta)$ は $\theta = 0$ に関して対称な密度関数である。この正弦関数摂動分布族は $\lambda \neq 0$ ならば非対称となる。また、 $f_0(\theta)$ が wrapped Cauchy 分布の密度関数ならば、摂動後もパラメータの値によらず単峰となるが、一般には、 $f_0(\theta)$ が単峰であっても摂動後の分布はパラメータの選び方によっては単峰とは限らない。一方、Fujisawa and Abe (2013) は、実軸上において、正規化定数とモードの位置が元の対称分布と変わらない単峰な非対称分布族を構成している。

本講演ではこの考え方を利用して、まず、

$$f(\theta) = f_0(s^{-1}(\theta)), \quad \theta \in [-\pi, \pi) \quad (1)$$

の形の円周上の単峰な非対称分布族を提案し、一般的性質を与える。ここで $s: [-\pi, \pi) \rightarrow [-\pi, \pi)$ は、 $H(\pm\pi) = 0$ かつ $|H'(\theta)| \leq 1$ である偶関数 $H(\theta)$ を用いて、

$$s(\theta) = \theta + H(\theta)$$

により与えられる全単射な関数である。扱いやすい特別な場合として、 $H(\theta) = \lambda \sin^2 \theta$ ($|\lambda| \leq 1$) とした

$$s_\lambda(\theta) = \theta + \lambda \sin^2 \theta$$

を考える。このとき、 $s_\lambda(0) = 0$ となり、モードは元の対称分布と一致する。位置パラメータ μ ($-\pi \leq \mu < \pi$) は $\theta \rightarrow \theta - \mu$ として導入される。

我々はさらに、モード付近でより集中度の強いデータへあてはめることを考える。このために (1) の分布族にパラメータ ν ($|\nu| \leq 1$) を導入し、密度関数が

$$f(\theta) = \frac{1}{1 - \nu \alpha_1} f_0(t^{-1}(\theta; \lambda, \nu)), \quad \theta \in [-\pi, \pi) \quad (2)$$

により与えられる非対称分布族を提案する。ここで、 $\alpha_1 = E[\cos \Theta]$ は元の対称分布の密度関数 $f_0(\theta)$ の 1 次のコサインモーメントであり、関数 $t: [-\pi, \pi) \rightarrow [-\pi, \pi)$ は

$$t(\theta; \lambda, \nu) = s_\lambda(\theta - \nu \sin \theta) = \theta - \nu \sin \theta + \lambda \sin^2(\theta - \nu \sin \theta)$$

により与えられる。(2) の正規化定数は元の対称分布の密度関数 $f_0(\theta)$ と異なるが、元の対称分布の 1 次モーメントを用いて表現されているので、正規化定数が陽的に表せない多くの非対称分布族に比べて単純である。

参考文献

- [1] Abe, T. and Pewsey, A. (2011). Sine-skewed circular distributions. *Statistical Papers*, **52**, 683–707.
- [2] Fujisawa, H. and Abe, T. (2013). A family of skew-unimodal distributions with mode-invariance through transformation of scale. *ISM Research Memorandum #1151*.